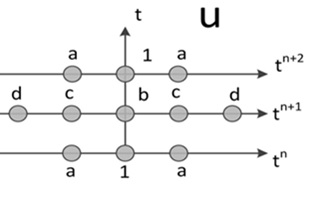
# **Уравнение малых поперечных колебаний стержня**

Рассмотрим уравнение малых поперечных колебаний стержня

Предположим, что все коэффициенты постоянны, а источник отсутствует. Тогда уравнение малых поперечных колебаний стержня имеет вид

Рассмотрим компактную схему, которая аппроксимирует уравнение (1) по шаблону, (изображенном на Рис. 1)

**

*Рис. 1*

где коэффициенты , , , и безразмерные параметры , , , .

После -преобразования уравнения (2), найдем фундаментальную систему решений. Получаем характеристическое уравнение четвертого порядка

Делим обе его части на для того, чтобы свести к возвратному уравнению.

Поделим также получившееся уравнение на .

Сделаем замены и :

Корни уравнения (3) имеют вид

## **Разложение в ряд Тейлора функции**

При справедливы асимптотические оценки

Здесь и далее предполагаем, что ветвь берется из со знаком плюс при вещественных , в то время как – со знаком минус. Функция стремится к константе, а – к бесконечности при .

В уравнении (4) преобразуем выражение под квадратным корнем:

Под квадратным корнем раскроем скобки:

В выражении под квадратным корнем приведем подобные:

Упростим выражение (5). Для этого разложим подкоренное выражение на множители. Рассмотрим выражение под квадратным корнем

и найдем его корни:

Поделим обе части уравнения на :

Сделаем замену . Продолжая, получаем

Корни уравнения (6) имеют вид

Упростим выражение для чисел . Для этого преобразуем выражение под корнем:

Значение берется из со знаком плюс перед корнем, а значение – со знаком минус.

**Утверждение**

Для любых и и коэффициентов , , , и , которые через них выражаются согласно уравнению (2), выполняется .

***Доказательство***

Покажем, что действительно выполняется . Подставим выражение :

Умножим обе части на и перенесем квадратный корень в правую часть:

Возведем обе части в квадрат:

Раскроем скобки и упростим выражение:

Вспомним, чему равны коэффициенты , , , :

Подставим их в получившееся выражение, получаем:

Упростим выражения в скобках:

Внесем коэффициенты перед скобками внутрь:

Вынесем из-под каждой дроби коэффициенты так, чтобы все знаменатели оказались одинаковыми:

Умножим обе части на

Приведем подобные:

***Конец доказательства.***

**Следствие*:***

Корни уравнения (6), согласно теореме Виета, имеют вид

Вернемся в выражению (5) для . Поскольку , то корни подкоренного выражения имеют вид

Таким образом, можно переписать выражение (5) в виде

Вынесем квадраты из-под квадратного корня и раскроем скобки:

Вынесем из-под квадратного корня

Обратим внимание на то, что по теореме Виета (для выражения под квадратным корнем в (5)) выполняется , а значит выражение . Также можно заметить, что Таким образом, имеем выражение для

Воспользуемся формулой для производящей функции многочленов Лежандра. Получаем

## **Особенности функций**

Рассмотрим особенности функций на комплексной плоскости, а именно – точки ветвления, которые из формулы (4) достигаются при

Числитель в уравнении (7а) равен нулю:

Как было отмечено ранее, корни и равны

Преобразуем подкоренное выражение:

Раскроем скобки. Получаем:

Приведем к общему знаменателю:

Подставляя выражения для параметров , и , получаем

Группируя, получаем

что всегда больше нуля для положительных параметров и . Это значит, что корни и всегда вещественны и , то есть один по модулю всегда больше единицы, другой – меньше. Это значит, что у функции всегда есть точка ветвления внутри единичной окружности на комплексной плоскости.

## **Разложение в ряд Тейлора функций**

Ранее была указана замена . Решим его относительно :

Поскольку имеется два значения для , уравнение (8) имеет четыре корня:

Для определенности, обозначим

### **Разложение в ряд Тейлора функций**

Как отмечалось ранее, при справедливо . Таким образом, для разложения квадратного корня в выражениях для необходимо представить как

где – остаточное разложение в ряд Тейлора, причем при . Получаем выражение для :

Преобразуем полученное выражение. Раскроем скобки под квадратным корнем и приведем подобные.

Вынесем из под квадратного корня множитель . При любых , множитель положителен: .

Требуется разложить второй квадратный корень с при . Для этого сделаем замену

Тогда получаем выражение

Воспользуемся формулой для производящей функции многочленов Лежандра. Получаем

Теперь подставим обратно вместо . Получаем итоговое разложение:

### **Разложение в ряд Тейлора функций**

В выражении для имеется функция , которая стремится к бесконечности при . Поэтому для разложения необходимо сначала вынести член, стремящийся к бесконечности, из-под квадратного корня.

Воспользуемся разложением квадратного корня. Тогда получаем

Заметим, что из уравнения (3) и теоремы Виета следует, что

а значит

Тогда можно переписать выражение для

Разложим на простейшие рациональную функцию . Для этого найдем корни знаменателя:

или для определенности

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов и разложим дробь на две простые

где

или проще

Продолжая, имеем разложение для дроби :

Внося все под одну сумму, получаем

Учитывая, что , упростим запись :

Таким образом, разложение для имеет вид

## **Граничное условие ИЗК**

При малых имеем . Поскольку у нас имеется уравнение 4-го порядка, то нужно поставить по 2 независимых граничных условия на каждой границе. Пусть , , и многочлены заданных степеней, . На левом краю граничное условие должно удовлетворять условиям

причем , , , и

причем , , .

Первое граничное условие позволяет вычислить решение в точке на границе, а второе – в точке, ближайшей к границе. Степени многочленов задают число моментов времени, в которые учитываются значения решения в соответствующей точке, отстоящей от границы на 0, 1, 2 и 3 шага .